

УДК 621.98.043

РОЗОВ Ю. Г.

Херсонський національний технічний університет

**АНАЛИЗ И ВИДЫ ПОТЕРИ ПРОДОЛЬНОЙ
УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИ-
ЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ**

Цель. Определить параметры и условия, влияющие на возникновение кольцевых складок и продольного изгиба тонкостенной цилиндрической оболочки при осевом сжатии.

Методика. Для достижения поставленной цели в статье используются аналитические методы анализа напряжённо-деформированного состояния сжатой оболочки (решение уравнений равновесия; определение критической нагрузки сжатия в области упругих и пластических деформаций).

Результаты. Получены формулы для расчёта величины критического меридионального напряжения по условию потери осевой устойчивости сжатых оболочек с образованием кольцевых складок (поперечных волн). Определены условия перехода от образования кольцевой складки к продольному изгибу и получена формула для определения предельной длины сжатой тонкостенной цилиндрической оболочки.

Научная новизна. На основе анализа продольной устойчивости при сжатии трубчатой тонкостенной оболочки найдено аналитическое решение и определены следующие параметры: критическое значение осевой силы, предельные значения длины оболочки по условию перехода от образования кольцевых складок к возникновению продольного изгиба; предложены аналитические зависимости для определения указанных параметров. Определены характер и степень влияния коэффициента Пуассона на процесс складкообразования при осевом сжатии оболочек.

Практическая значимость. Результаты анализа рекомендованы к использованию при проведении проектно-прочностных расчётов нагруженных инженерных конструкций, а также при проектировании операций листовой штамповки трубчатых заготовок (например, для расчёта усилия «проталкивания» при обжиге, раздаче).

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, кольцевая складка, продольный изгиб, предельная длина, меридиональное напряжение, инженерная конструкция, листовая штамповка.

Введение. При осевом сжатии тонкостенных цилиндрических оболочек, возможно два вида потери продольной устойчивости с локальным изменением цилиндрической формы заготовки, а именно:

- образование кольцевой складки (рис. 1, а);
- продольный изгиб (искривление продольной оси заготовки) (рис. 1, б).

Факторы, оказывающие влияние на процесс складкообразования, к сожалению, изучены не достаточно, а рекомендации носят приближённый характер и не подкреплены соответствующими аналитическими зависимостями, удобными для инженерных расчётов.

Согласно классической теории, величина критического радиального напряжения σ_{ρ}^{\max} , при котором наступает кольцевое складкообразование, определяется по формуле [1]:

$$\sigma_{\rho}^{\max} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{S_3}{R_3}, \quad (1)$$

где: E - модуль Юнга;

ν - коэффициент Пуассона;

S_3 - толщина, а R_3 - радиус оболочки.

Однако результаты экспериментов показывают, что осевое (меридиональное) напряжение, соответствующее началу складкообразования при упругих деформациях, имеет величину, в 3-4 раза меньшую критического напряжения, определяемого по формуле (1).

Кроме того, знание величины критического радиального напряжения σ_ρ^{\max} , возникающего в стенках, позволит определить, при каком значении относительной длины цилиндрической оболочки возможен тот или иной вид потери продольной устойчивости.

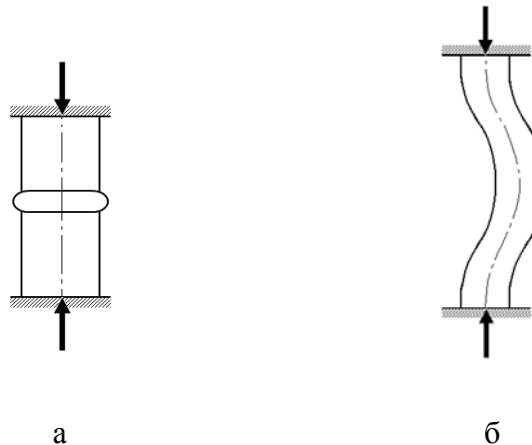


Рис. 1 Виды потери продольной устойчивости трубной заготовки с возникновением: а – кольцевой складки; б – продольного изгиба

Цель работы: на основе анализа процессов потери продольной устойчивости, определить параметры и условия, влияющие на возникновение кольцевых складок и продольного изгиба цилиндрической оболочки при осевом сжатии.

Проанализируем устойчивость сжатой тонкостенной цилиндрической оболочки в пределах упругих деформаций, для чего рассмотрим момент возникновения упругого изгиба в меридиональном сечении оболочки [2]. Рассмотрим условия равновесия элементарной полоски участка упругого изгиба в меридиональном сечении оболочки (рис. 2), ограниченной двумя меридиональными плоскостями с центральным углом $d\gamma$ между ними и двумя коническими поверхностями, перпендикулярными к срединной поверхности оболочки, проходящими через границы изгиба.

Длины граней рассматриваемого элемента обозначим через dl_1 и dl_2 , при этом (см. рис. 2):

$$dl_1 \approx R_3 d\gamma - \text{ширина элемента в широтном сечении};$$

$$dl_2 = R_\rho \alpha_u \approx R_\rho \sin \alpha_u - \text{длина участка изгиба в меридиональном сечении.}$$

Рассматривая продольный изгиб элементарной полоски необходимо учесть, что, деформируясь, она взаимодействует с соседними полосками. Это взаимодействие приводит к возникновению тангенциальных напряжений σ_θ , препятствующих изменению размера в направлении их действия, вследствие чего допускаем $\epsilon_\theta = 0$.

Примем, что меридиональные напряжения σ_ρ одинаковы на границах рассматриваемого участка, а тангенциальные напряжения σ_θ равномерно распределены по

боковыми поверхностями выделенного элемента.

Примем, что кривизна срединной поверхности в меридиональном сечении участка упругого изгиба определяется действием момента M и сил, образованных напряжениями σ_ρ и σ_θ и величина этой кривизны определяется условием равенства момента M и моментов, создаваемых элементарными силами, образованными напряжениями σ_ρ и σ_θ .

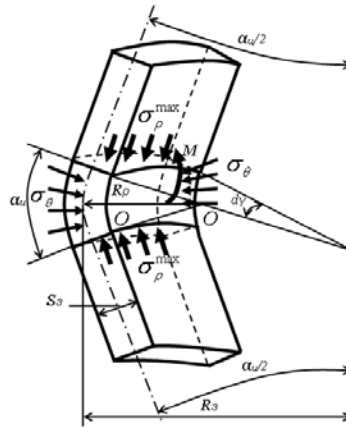


Рис. 2 Расчётная схема равновесия элементарной полоски участка упругого изгиба в меридиональном сечении цилиндрической оболочки

Для определения размеров участка упругого изгиба в меридиональном сечении оболочки составим уравнение равновесия, выраженное через моменты, относительно сечения 0-0:

$$M = \sigma_\rho S_3 R_3 d\gamma (1 - \cos \alpha_u) R_\rho + 2\sigma_\theta S_3 R_\rho \sin \alpha_u \frac{d\gamma}{2} R_\rho \frac{\sin \alpha_u}{2}. \quad (2)$$

Изгибающий момент M при упругом изгибе рассматриваемой полоски в меридиональном сечении может быть выражен формулой:

$$M = \sigma_\rho \frac{R_3 d\gamma S_3^2}{6(1 - \nu^2)}, \quad (3)$$

при выводе которой учитывалась, так называемая, цилиндрическая жёсткость оболочки D [3], равная:

$$D = \frac{EI}{1 - \nu^2}, \quad (4)$$

где $I = \frac{R_3 d\gamma S_3^3}{12}$ - осевой момент инерции поперечного сечения полоски.

С учётом плоского напряжённого состояния, на основании формул обобщённого закона Гука (при допущении $\epsilon_\theta = 0$) получим:

$$\epsilon_\rho = \frac{\sigma_\rho}{E} - \nu \frac{\sigma_\theta}{E}; \sigma_\theta = \nu \sigma_\rho.$$

Тогда уравнение равновесия после соответствующих подстановок и очевидных сокращений запишется:

$$\frac{R_3 S_3}{6(1-\nu^2)} = R_3 R_\rho (1 - \cos \alpha_u) + \nu R_\rho^2 \frac{(\sin \alpha_u)^2}{2}$$

или, с учётом того, что при малых значениях угла α_u (начало образования складки), справедливы равенства:

$$\sin \alpha_u \approx \alpha_u; 1 - \cos \alpha_u \approx \frac{\alpha_u^2}{2},$$

получим окончательную запись упрощенного уравнения равновесия относительно угла α_u в виде:

$$\alpha_u = \sqrt{\frac{R_3 S_3}{3(1-\nu^2)(R_3 R_\rho + \nu R_\rho^2)}}, \quad (5)$$

где радиус кривизны R_ρ рассматриваемого участка изгиба в меридиональном сечении при упругой деформации полосы определяется по известной формуле [4], которая для нашего случая может быть записана в виде:

$$R_\rho = \frac{ES_3}{2\sigma_\rho}. \quad (6)$$

Для определения критического напряжения σ_ρ^{\max} , при котором возникает упругий продольный изгиб рассматриваемой полосы, воспользуемся известной формулой Эйлера [5], которая с учётом цилиндрической жёсткости выразится в виде:

$$\sigma_\rho^{\max} = \frac{\pi^2 E}{l_u^2 F (1-\nu^2)},$$

где $F = R_3 d \gamma S_3$ - площадь поперечного сечения полосы;

$l_u = dl_2 = R_\rho \alpha_u$ - длина участка изгиба полосы в меридиональном сечении.

Таким образом, после сокращений получим:

$$\sigma_\rho^{\max} = \frac{\pi^2 ES_3^2}{12 R_\rho^2 \alpha_u^2 (1-\nu^2)}.$$

После подстановки в последнее равенство полученных ранее соответствующих выражений для α_u и R_ρ (формулы (5) и (6)), после сокращений получим формулу для определения абсолютной величины критического напряжения в виде:

$$\sigma_\rho^{\max} = \nu \frac{\pi^2}{2(\pi^2 - 2)} E \frac{S_3}{R_3} \approx 0,627 \nu E \frac{S_3}{R_3}. \quad (7)$$

Полученная формула с достаточной степенью точности может быть использована для определения критического меридионального напряжения σ_ρ^{\max} при анализе устойчивости сжатой тонкостенной цилиндрической оболочки в пределах упругих деформаций. Сравнение с экспериментальными данными показало достаточно высокую точность расчётных величин критического меридионального напряжения σ_ρ^{\max} для материалов оболочки с коэффициентом Пуассона в пределах 0,25...0,4 (углеродистая и легированная сталь, алюминий, медь, бронза, латунь). Область её применимости ограничена выполнением неравенства:

$$\sigma_\rho^{\max} \leq \sigma_{\text{пл}},$$

где $\sigma_{\text{пл}}$ - предел пропорциональности материала заготовки, т.е. для расчёта трубных заготовок с относительной толщиной стенки:

$$\frac{S_3}{R_3} \leq 1,595 \frac{\sigma_{\text{пл}}}{E \nu}. \quad (8)$$

Анализ формулы (7) позволяет сделать вывод, что на величину критического меридионального напряжения $\sigma_{\rho}^{\text{max}}$, вызывающего возникновение поперечной складки, оказывает влияние коэффициент Пуассона ν . Прямопропорциональная зависимость $\sigma_{\rho}^{\text{max}} - \nu$ объясняется тем, что при больших значениях коэффициента ν тангенциальные напряжения σ_{θ} с большей интенсивностью действуют на элементарные полоски, затрудняя их взаимное перемещение друг относительно друга, что в результате снижает вероятность образования кольцевой складки. Анализ неравенства (8) показывает, что формула (7) применима для оболочек, толщина которых весьма мала по сравнению с радиусом кривизны поверхности. Например, для таких материалов, как высококачественные конструкционные легированные стали, относительная толщина цилиндрической оболочки не должна превышать величину:

$$\frac{S_3}{R_3} \leq 0,04.$$

В этой связи, проанализируем процесс складкообразования для сжатых тонкостенных цилиндрических оболочек с относительной толщиной стенок:

$$1,595 \frac{\sigma_{\text{пл}}}{E \nu} \leq \frac{S_3}{R_3} \leq 0,1. \quad (9)$$

Для проведения корректного анализа процесса складкообразования, воспользуемся методикой учёта влияния изгиба на поле напряжений, предложенной в работе [4].

Вернёмся к рисунку 2.

Учитывая только действие меридиональных напряжений $\sigma_{\rho}^{\text{max}}$, принимаем, что моменты, действующие по границам участка изгиба от сил, образованных напряжениями $\sigma_{\rho}^{\text{max}}$, уравновешиваются моментом M , величину которого определим из формулы [4]:

$$M = \frac{S_3^2}{4\sigma_s} \left(\sigma_s^2 - (\sigma_{\rho}^{\text{max}})^2 \right) R_3 d\gamma.$$

Уравнение равновесия моментов относительно сечения 0-0 запишется в виде:

$$\sigma_{\rho}^{\text{max}} S_3 R_3 R_{\rho} d\gamma - \sigma_{\rho}^{\text{max}} S_3 R_3 R_{\rho} d\gamma \cos \alpha = \frac{S_3^2}{4\sigma_s} \left(\sigma_s^2 - (\sigma_{\rho}^{\text{max}})^2 \right) R_3 d\gamma.$$

Решая уравнение относительно $\sigma_{\rho}^{\text{max}}$, используя правило Лопиталья для раскрытия неопределённости вида (для нашего случая)

$$\lim_{\alpha_u \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \alpha_u)}{\alpha_u} = 0,$$

после несложных упрощений, окончательно получим:

$$\sigma_{\rho}^{\max} = \sigma_s. \quad (10)$$

Таким образом, величина меридионального напряжения, вызывающего потерю устойчивости трубных тонкостенных заготовок с образованием кольцевой складки, по абсолютному значению, может быть принята равной напряжению текучести материала деформируемой заготовки.

Аналогичные результаты, на основании экспериментальных данных, получены и приведены в работах [6 – 9].

Продолжим анализ.

Как указывалось выше, потеря продольной устойчивости сопровождается образованием кольцевой складки или продольным изгибом.

Основной причиной возникновения одного или другого вида потери устойчивости или, другими словами, критерием, определяющим возможность перехода от образования кольцевой складки к продольному изгибу, является высота (длина) сжатой оболочки.

Определим предельное значение длины оболочки $l_{пред}$, при которой происходит переход от потери устойчивости с образованием кольцевой складки к продольному изгибу (рис. 3).

Площадь сечения для тонкостенного кольцевого сечения равна:

$$F_{сеч} = 2\pi R_s S_s,$$

Величина осевого момента инерции равна:

$$I_{ос}^{\min} = I_{x(y)} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} =$$

$$= \frac{\pi \left[\left(R_s + \frac{S_s}{2} \right)^4 - \left(R_s - \frac{S_s}{2} \right)^4 \right]}{4} = \frac{8\pi R_s \frac{S_s}{2} \left(R_s^2 + \frac{S_s^2}{4} \right)}{4} \approx \pi R_s^3 S_s,$$

где: D – наружный диаметр оболочки;

d – внутренний диаметр оболочки.

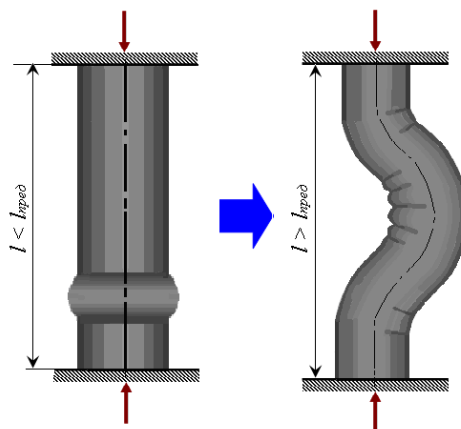


Рис. 3 Переход от потери устойчивости с образованием кольцевой складки к продольному изгибу

Согласно известной формулы Эйлера, величина критического напряжения при сжатии, по условию возникновения продольного изгиба, равна [5]:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{ос}^{\min}}{F_{сеч} (\nu_l l)^2},$$

где: E – модуль Юнга;

ν_l – коэффициент приведенной длины (высоты) трубной заготовки (например, для схемы, изображённой на рис. 3, $\nu_l = 0,5$).

С учётом равенства:

$$\sigma_{кр} = \sigma_{\rho}^{\max},$$

где величина σ_{ρ}^{\max} определяется по формуле (10), после несложных упрощений, подразумевая $l=l_{пред}$, окончательно получим:

$$l_{пред} = \frac{\pi R_3}{\nu_l} \sqrt{\frac{E}{2\sigma_s}}. \quad (11)$$

Таким образом, для тонкостенных оболочек условие возникновения кольцевой складки:

$$l \leq \frac{\pi R_3}{\nu_l} \sqrt{\frac{E}{2\sigma_s}}; \quad (12)$$

условие возникновения продольного изгиба:

$$l \geq \frac{\pi R_3}{\nu_l} \sqrt{\frac{E}{2\sigma_s}}. \quad (13)$$

Выводы.

1. Рассмотрены возможные виды потери продольной устойчивости сжатой тонкостенной цилиндрической оболочки, проведен анализ и определены параметры, влияющие на процесс образования поперечных (кольцевых) складок и возникновение продольного изгиба.

2. Получены формулы для определения величины критического меридионального напряжения, возникающего при потере устойчивости сжатой тонкостенной цилиндрической оболочки с образованием кольцевой складки.

3. Получена формула для определения предельной длины сжатой тонкостенной цилиндрической оболочки при потере осевой устойчивости, по условию перехода от образования кольцевой складки к продольному изгибу.

4. Полученные формулы рекомендованы к использованию при проведении проектно-прочностных расчётов нагруженных инженерных конструкций, а также при проектировании операций листовой штамповки трубчатых заготовок (например, для расчёта усилия «проталкивания» при обжиге, раздаче).

Список использованной литературы

1. Феодосьев В. И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1975. – 173 с.
2. Розов Ю. Г. К вопросу об осевой устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочки в области упругих деформаций / Ю. Г. Розов // Вестник Херсонского национального технического университета: инженерные науки. – Херсон, 2002. – № 3 (16). –

С.

3. Александров А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. П. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высшая школа, 1990. – 400 с. : ил.
4. Попов Е. А. Основы теории листовой штамповки / Е. А. Попов. – М. : Машиностроение, 1977. – 278 с.
5. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев; отв. ред. Г. С. Писаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – К. : Наукова думка, 1988. – 736 с.
6. Аверкиев Ю. А. Анализ обжима полых цилиндрических заготовок конической матрицей / Ю. А. Аверкиев // сб. труд. Машины и технология обработки металлов давлением. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1955. – № 42. – С. 111–118.
7. Аверкиев Ю.А. Об определении наибольшей степени деформации при обжиме пустотелых цилиндрических заготовок в конической матрице / Ю. А. Аверкиев // Кузнечно-штамповочное производство. – 1966. – № 11. – С. 19 – 22.
8. Фролов В. Н. Обжим полых цилиндрических заготовок / В. Н. Фролов. – М. : Машгиз, 1957. – 24 с.
9. Фролов В. Н. Обжим труб в разъемной матрице / В. Н. Фролов // Кузнечно-штамповочное производство. – 1960. – № 5. – С. 3 – 6.

АНАЛІЗ І ВИДИ ВТРАТИ ПОЗДОВЖНЬОЇ СТІЙКОСТІ ТОНКОСТІННОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ ОСЬОВОМУ СТИСНЕННІ РОЗОВ Ю.Г.

Херсонський національний технічний університет

Мета. Визначити параметри та умови, що впливають на виникнення кільцевих складок і поздовжнього вигину тонкостінної циліндричної оболонки при осьовому стисненні.

Методика. Для досягнення поставленої мети в статті використовуються аналітичні методи аналізу напружено-деформованого стану стислій оболонки (рішення рівнянь рівноваги; визначення критичного навантаження стиснення в області пружних і пластичних деформацій).

Результати. Отримано формули для розрахунку величини критичного меридіонального напруження за умовою втрати осьової стійкості стиснутих оболонок з утворенням кільцевих складок (поперечних хвиль). Визначено умови переходу від кільцевої складки до подовжнього вигину і отримана формула для визначення граничної довжини стислій тонкостінної циліндричної оболонки.

Наукова новизна. На основі аналізу поздовжньої стійкості при стисканні трубчастої тонкостінної оболонки знайдено аналітичне рішення і визначені наступні параметри: критичне значення осьової сили, граничні значення довжини оболонки за умовою переходу від утворення кільцевих складок до виникнення поздовжнього вигину; запропоновані аналітичні залежності для визначення зазначених параметрів. Визначено характер і ступінь впливу коефіцієнта Пуассона на процес складкоутворення при осьовому стисненні оболонок.

Практична значимість. Результати аналізу рекомендовані до використання при проведенні проектних розрахунків на міцність навантажених інженерних конструкцій, а також при проектуванні операцій листового штампування трубчастих заготовок (наприклад,

для розрахунку зусилля «проштовхування» при обтіску, роздачі).

Ключові слова: циліндрична оболонка, кільцева складка, поздовжній вигин, гранична довжина, меридіональне напруження, інженерна конструкція, листове штампування.

ANALYSIS AND TYPES OF LOSS OF THE LONGITUDINAL STABILITY OF THE THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELL UNDER AXIAL COMPRESSION
ROZOV Y.G.

Kherson National Technical University

Purpose. In the article the parameters and conditions that influence the occurrence of annular folds and buckling of thin-walled cylindrical shell under axial compression are determined.

To achieve this goal in the article used analytical methods for analysis of stress-strain state of the compressed shell (the solution of the equilibrium equations, the definition of critical load compression in the elastic and plastic deformations).

Scientific novelty. Based on the analysis of longitudinal stability in compression thin-walled tubular shell analytical solution and define the following: critical axial force, limits the length of the shell of the transition from education to the appearance of wrinkles ring buckling; The analytical dependence for determination of these parameters. Determine the nature and degree of influence of Poisson's ratio in the process of folding the shells under axial compression.

Findings. The formulas for calculating the values of the critical meridional stress according to the loss of axial stability of compressed shells with the formation of the annular folds (transverse waves) are obtained. The article determines the conditions of transition from formation of annular folds to buckling and the formula for determining the maximum length of the compressed thin-walled cylindrical shell formation.

Practical value. The results of the analysis are recommended for use during design-strength calculations of loaded engineering structures and for design of sheet metal forming of tubular workpieces (for example, to calculate the effort of "pushing" by crimping, expanding).

Keywords: *cylindrical shell, an annular fold, buckling, limit length, meridional stress, engineering structure, sheet-metal stamping.*